Colección de Primeros Parciales (Versión 1.1)

Análisis I - Análisis Matemático I – Matemática 1 - Análisis II (C)

Matemática - Química - Física - Ciencias de la Atmósfera - Oceanografía - Computación

Escrito y editado por: Gabriel R. (Estudiante de Lic. en Ciencias Matemáticas – FCEN UBA)

Introducción

En este documento te ofrezco algunos **primeros parciales** tomados en cuatrimestres anteriores en la materia de: **Análisis I, Análisis Matemático I, Matemática 1 ó Análisis II (C)**, para las carreras de: Matemática, Química, Física, Ciencias de la Atmósfera, Oceanografía y Computación. Esta materia se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. También te doy las respuestas, alguna sugerencia y la resolución de los mismos.

También te muestro los temas que entran para el primer parcial y la bibliografía recomendada por los docentes. Si buscas más info de la materia como fechas de exámenes, cursos y turnos disponibles, guías de ejercicios, etc. visitá la página oficial desde: http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/

Sin embargo, hay 2 libros que te recomiendo personalmente:

- Spinadel Vera W.: Cálculo 2. Editorial Nueva Librería (Está en la biblioteca del Pabellón II)
- Spinadel Vera W.: Suplemento al Cálculo 2. Editorial Nueva Librería. (No está en ninguna biblioteca, pero lo podés conseguir en alguna sucursal de la editorial, te paso el link: www.nuevalibreria.com.ar/site/home/index.php)

En el primero, se desarrolla toda la teoría que necesitas saber sobre el cálculo vectorial con sus respectivas demostraciones y un montón de ejemplos maravillosamente explicados con aplicaciones en ingeniería, medicina, física, etc… además, al final de cada capítulo te ofrece un completo banquete de problemas (bon appetit!). En el segundo, tiene absolutamente TODOS los problemas que te propuso en el Cálculo 2 resueltos y explicados paso a paso. Estos 2 libros también te van a servir para Análisis II, Análisis Matemático II o Matemática 3. Además la autora, es docente de la FCEN UBA!

Podés encontrar más parciales en la fotocopiadora del Pabellón I (de ahí los saqué).

Para descargar más apuntes o la última actualización de este documento, visitá **FDX Maths**. Si tenés alguna sugerencia, o encontrás errores en cualquiera de los apuntes publicados, mandame un e-mail. También podés colaborar enviando algún otro parcial, final o examen libre de la materia.

Blog: www.fdxmaths.blogspot.com.ar

Facebook (Blog): www.facebook.com/fdxmaths

E-mail (Blog): fdxmaths@hotmail.com

Copyright

Temas del Programa que entran para el Primer Parcial

http://cms.dm.uba.ar/academico/lic/programas/Analisis_I_M

1) TOPOLOGÍA EN R y en R^n .
   Completitud de R. Existencia del supremo y equivalencias. Distancia, discos abiertos y discos cerrados. Puntos interiores. Interior de un conjunto. Conjuntos abiertos. Puntos adherentes. Clausura de un conjunto. Conjuntos cerrados. Conjuntos acotados. Límite de sucesiones de números reales. Límite de sucesiones en R^n y límite en cada coordenada.
2) FUNCIONES DE R^n en R^k (n, k = 1, 2, ...)
   Representación gráfica. Dominio de definición. Curvas y superficies de nivel. Límite de funciones de R^n en R^k . Límite a lo largo de rectas y de curvas. Funciones continuas. Composición de funciones continuas. Propiedades de las funciones continuas.
3) CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES
   Derivadas parciales. Aproximación lineal. Diferencial de una función. Matriz jacobiana. Plano tangente al gráfico de una función. Regla de la cadena. Teoremas generales de la función inversa y de la función implícita. Producto escalar en R^n . Ecuación del plano ortogonal a un vector. Derivadas direccionales. Gradiente. Relación con las superficies de nivel y la dirección de máximo crecimiento. Plano tangente a una superficie de nivel. Teorema del valor medio en varias variables. Derivadas de orden superior. Aproximación polinomial de orden 2. Matriz Hessiana (o Hessiano) de una función.

Régimen de Aprobación

Para firmar los trabajos prácticos se deben aprobar dos exámenes parciales. Habrá dos fechas de recuperación. En cada fecha se puede recuperar cualquiera de los parciales. Para poder ser incluido en las Actas de Trabajos Prácticos, es necesario haberse inscripto en la materia (a través del Sistema de Inscripciones de la Facultad) y haber completado la encuesta de evaluación docente. Para firmar la materia es necesario haber aprobado los trabajos prácticos y el examen final.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- NORIEGA, R. : Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Docencia
- LAGES LIMA, E. : Curso de análisis, volúmenes 1 y 2.
- MARSDEN, J. y TROMBA, A. : Cálculo Vectorial. Tercera edición. Addison-Wesley.
- SPIVAK, M.: Calculus (Cálculo Infinitesimal), Vol I y II. Ed. Reverte.
- PISKOUNOV, N. : Cálculo diferencial e integral, tomos I y II. Ed. Mir.
- SPIEGEL, M. R. : Cálculo superior (Advanced Calculus). Serie Shaum.
- REY PASTOR, J. , PI CALLEJA y TREJO : Análisis Matemático, Vol. I y II. Ed. Kapelusz.
- APOSTOL, T. : Calculus, Vol. I y II. Editorial Reverte.
- COURANT, R. : Diferential and Integral Calculus. Ed. Interscience
- LAROTONDA, Gabriel. : Cálculo y Análisis. Bajátelo gratis: http://glaroton.ungs.edu.ar/calculo.pdf

Herramientas informáticas

Si querés graficar en 2 y 3 dimensiones, y tenés internet, podés hacerlo con: www.fooplot.com Ó mejor aún: www.wolframalpha.com

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I

Primer Parcial (12/05/07)

1	2	3	4

CALIF.

TEMA 2

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Analizar la convergencia de la integral impropia:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)^3}} \quad dx$$

2. Sea $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{e^{x+2}}$

   a) Obtener la serie de Taylor de f centrada en $x_0 = -2$ y encontrar su radio de convergencia.

   b) Estimar $f(-\frac{7}{4})$ con error menor que $\frac{1}{10^3}$.

3. *a*) Estudiar para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergencia absoluta y condicional de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\alpha n}}{\sqrt{n}}$$

   b) Estudiar para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n^{\alpha}+3}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3} & (x,y) \neq (-1,0) \\ 1 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

   a) Probar que f no es continua en $(-1,0)$.

   b) Redefinirla en $(x,y) = (-1,0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I

Recuperatorio Primer Parcial (16/07/07)

1	2	3	4

CALIF.

TEMA 2

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Analizar la convergencia de la siguiente integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{10x^3+2x}}\,dx$$

2. *a*) Justificar el siguiente desarrollo en serie de potencias. Indicar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es válido.

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

   b) Calcular $\ln(2)$ con un error menor que 10^{-2}.

3. Hallar TODOS los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^n(\alpha)}{\sqrt{n}}$$

4. Estudiar la continuidad de f en el punto $(1,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I
Primer Parcial (13/10/07)

1	2	3	4	5

CALIF.

TEMA 3

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Considerar la función f definida por la fórmula $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$. Calcular el dominio de f. Analizar la existencia del límite de f cuando $(x,y) \to (0,0)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}(y-1)^2 e^{xy}}{x^4 + (y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

Analizar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(2x+1-y)+(x-1)^2(3+6x+y^2-3y)}{y^2+3(x-1)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 3 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Escribir, si existe, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 0, f(1,0))$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y sea $z = 4(x+2) - 1 + 3(y-1)$ el plano tangente al gráfico de f en el punto $(-2, 1, -1)$. Considerar la función $g(x,y) = (xy - 2y - 1, 2e^{x-y} - \cos(1-y))$ y el vector $v = (2,3)$. Calcular $\dfrac{\partial(f \circ g)}{\partial v}(1,1)$.

5. Sea $a \in \mathbb{R}$ y consideremos la superficie S de ecuación

$$a^2yz + axz + z^2 - y^4z = a^2.$$

Sea π el plano tangente a S en el punto $(0,1,1)$.
Determine todos los valores de a para los cuales la recta $\mathbb{L} : t(0,1,0) + (0,0,1)$ está contenida en π.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I
Recuperatorio Primer Parcial (17/12/07)

1	2	3	4	5

CALIF.

TEMA 1

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+e^x y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Analizar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea f la función definida por la fórmula $f(x,y) = \dfrac{x(y-1)}{e^x - y}$. Analizar la existencia del límite de f cuando $(x,y) \to (0,1)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula $f(x,y) = y^2 - 3xy + x + xe^{y-1}$
   a) Escribir la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(2,1,f(2,1))$.
   b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diferenciable tal que $g(-1) = (2,1)$ y $Dg(-1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   Calcular $D(g \circ f)(2,1)$ y $D(f \circ g)(-1)$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que en un entorno del origen satisface la desigualdad
$$0 \leq f(x,y) \leq |x|^\alpha |y|^\beta$$
   para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$.
   a) Demostrar que si $\alpha + \beta > 1$ entonces f es diferenciable en el origen.
   b) Mostrar con un ejemplo que siempre que $\alpha + \beta \leq 1$ hay alguna función que satisface la desigualdad pero que no es diferenciable en el origen.

5. Sea E el elipsoide definido por
$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : \ 3x^2 + y^2 - 2xy + z^2 = 1\}.$$
   Encontrar todos los puntos del elipsoide en los que el plano tangente es perpendicular a alguno de los ejes coordenados x, y o z.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I

Recuperatorio Primer Parcial (22/12/07)

1	2	3	4	5

CALIF.

TEMA 1

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Probar que para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vale que $\lim\limits_{t \to 0} f(t(a,b)) = 0$. Es decir, si nos acercamos por rectas al origen el límite da cero. ¿Existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Si existe, ¿Cuánto vale?

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sqrt[3]{x^2} - 2x^2 y}{\frac{1}{3}x^2 + 4y^2} & \text{si } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Calcular $\lim\limits_{k \to +\infty} f(\frac{1}{\ln(k)}, \frac{1}{k!})$ $(k \in \mathbb{N})$.

   Sugerencias: ¿A dónde tiende la sucesión de puntos $\{a_k\} = \left\{\left(\frac{1}{\ln(k)}, \frac{1}{k!}\right)\right\}$ cuando $k \to \infty$? ¿Será continua la f en el origen?

3. Estudiar existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad en el origen para
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

4. Demostrar que todo plano que sea tangente al cono $z^2 = x^2 + y^2$ pasa por el origen.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como
$$f(x,y) = (yx^2 + 5x + 2y \ , e^y x^2 + y)$$
   a) Probar que existe una inversa de f definida en un entorno del punto $p = (10,4) = f(2,0)$, diferenciable en p.
   b) Sean $v = (1,2)$, $w = (2,3)$ vectores en $\mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $q = (2,0)$ tal que $\frac{\partial g}{\partial v}(2,0) = 4$ y $\frac{\partial g}{\partial w}(2,0) = 5$. Calcular $D(g \circ f^{-1})(10,4)$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis 2(C)

Curso de verano 2008

Primer Parcial (19/02/08)

1	2	3	4	5

CALIF.

TEMA 2

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Sea D el número real dado por su número de documento. Considerar la función f definida por la fórmula $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$. Encuentre una dirección para aproximarse al origen de modo que el límite de f cuando $(x,y) \to (0,0)$ por esa dirección sea igual a D. Deducir que no existe el límite de f en el origen.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x-2)^{5/3}(y^2-1)^{2/3}}{|y|(x-2)^2 + x^2(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (2,1),\ (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (2,1) \end{cases}$$
Determinar si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ que haga que f sea continua en $(2,1)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(y^3 - x^4)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Escribir, si existe, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(0,0,f(0,0))$.

4. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y sea $z = 2x - 10 + 3y$ el plano tangente al gráfico de g en el punto $(1,1,-5)$. Considerar la función $\sigma(t) = \left((t+4)^2, t\right)$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f = \sigma \circ g$. Verificar que f es de clase C^1 en $(1,1)$. ¿Puede aplicarse el teorema de la función inversa?

5. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida como $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{2}$. Considerar el plano Π de ecuación $3x - 2y + z = 74$. Averiguar en qué punto $p \in \mathbb{R}^3$ este plano es tangente a una superficie de nivel de F. Indicar el nivel de dicha superficie.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I - Análisis II (C)

Recuperatorio Primer Parcial. (14/07/08)

TEMA 1

1	2	3	4	Calificación

Nombre y apellido: Turno:

No. de documento: No. de libreta: Carrera:

---

1. Analizar la existencia de los siguientes límites :

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(y^2\ln(x^2-y^2-3)\right)}{(x-2)^2+y^2}$; b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{e^{x-y-2}-1}{|x-2|+|y|}$.

2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+5y^2}}\operatorname{sen}\left(\dfrac{2x+y}{3(x+y)}\right)+2y+1 & \text{si } y\neq -x \\ 1 & \text{si } y=-x \end{cases}$$

Determinar si f es continua en $(0,0)$.

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función que satisface $0\leq f(x,y)\leq |x\operatorname{sen}(y)|$ en un entorno del origen. Probar que $f(x,y)$ es diferenciable en el origen. ¿Cuál es el plano tangente a $f(x,y)$ en el origen?

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $(1,0)$ y sean $\varphi_1,\varphi_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definidas por $\varphi_1(t)=(e^{-t},t)$ y $\varphi_2(t)=(e^t,t^2)$.
Sabiendo que $(f\circ\varphi_1)(t)=t^3+2t+e^{-t}+1$ y $(f\circ\varphi_2)(t)=1+e^t+2t^2-t^4$ para todo $t\in[-2,2]$,
a) Hallar el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,0)$.
b) Hallar $f_v(1,0)$, donde $v=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Primer Parcial - Curso de Verano 2010 - 25/02/10

1	2	3	4

CALIF.

Nombre y apellido:

No. de libreta: Carrera:

---

1. Determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\left(\cos^2(|x|+|y|)-1\right)\operatorname{sen}(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}}, & \text{si } (x,y,z) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = 0, \end{cases}$$
resulta continua en $(0,0,0)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 + 4y^3 - 1 & \text{si } xy \geq 0, \\ -x - 2y - 1 & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$
   a) Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ la función f resulta continua.
   b) Calcular el gradiente de f en $(0,0)$. Hallar la derivada direccional de f en $(0,0)$ en la dirección $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Deducir de los cálculos anteriores que f no es diferenciable en $(0,0)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x,y) = f(x^2+y^2, xe^y, 2\operatorname{sen}(xy)).$$
Sabiendo que $f(1,1,0) = 2$ y $\nabla f(1,1,0) = (2,1,4)$, hallar el plano tangente de g en el punto $(1,0)$. Utilizarlo para aproximar el valor de $g\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{10}\right)$.

4. Sea S la superficie dada por el gráfico de $f(x,y) = (x-y)(2x+1)+x$ y sea T la superficie $T = \{(x,y,z)/(x-y)z^2 + (y-z)x = 0\}$. Hallar todos los puntos de la recta $(x,y,z) = t(1,1,1)$ en los que ambas superficies tienen el mismo plano tangente.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO-COMISIÓN:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Primer Parcial - 2/10/2010 - Tema 1

---

1. Consideremos la sucesión $a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}$.

   a) Probar que a_n es decreciente y que está acotada superiormente e inferiormente.

   b) Calcular $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, $lim_{n\to\infty} e^{\cos(a_n)}$, $lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \sin(\frac{1}{y})}{x^2+y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

   a) Estudiar la continuidad de f en el punto $(1,0)$.

   b) Estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^2+1},$$

$\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definida como $\alpha(t) = \left(e^{t(t^2-1)}, \cos(\pi t)\right)$ y $g = f \circ \alpha$.

   a) Probar que existe un punto $t_0 \in (0,1)$ tal que $g(t_0) = 1/2$.

   b) Probar que existe un punto $t_1 \in (-1,1)$ tal que $g'(t_1) = 0$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)(e^{xy}-1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

   b) Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$ para los cuales $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que el plano tangente al gráfico de f en el punto $(3,1,f(3,1))$ tiene ecuación $-x + 2y - z = 1$. Si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está definida por

$$g(x,y,z) = f(ze^{xy}, y^2 - \text{sen}(x^3 z)),$$

hallar $\frac{\partial g}{\partial v}(0,1,3)$ siendo $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

Justifique todas sus respuestas.

ANÁLISIS 1

Recuperatorio del Primer Parcial - 11/12/2010

---

1. Sean $a_n = n + (-1)^n * n$ y $b_n = n \operatorname{sen}^2(\frac{n\pi}{2})$

   a) Demostrar que no existen los límites de a_n ni de b_n

   b) Probar que la sucesión de puntos en el plano (a_n, b_n) verifica $\|a_n, b_n\|_2 \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$.

   Sugerencia: Escriba los primeros términos de todas las sucesiones involucradas.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2(x-1)^2+y^2} & \text{si (x,y)} \neq \text{(0,0),(1,0)} \\ 1 & \text{si (x,y) = (0,0)} \\ 0 & \text{si (x,y) = (1,0)} \end{cases}$$

   Estudiar la continuidad de f en el plano; señalar los puntos en los que no es continua, y analizar si se puede resolver la discontinuidad cambiando el valor de la función en dichos puntos.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2x+1} - e^{-2y+1} + 3(y-x)}{y-x} & \text{si x} \neq \text{y} \\ -1 & \text{si x=y} \end{cases}$$

   a) Probar que, para $x \in (1,3)$ e $y \in (1,3)$ con $x \neq y$, existe $c \in (1,3)$ tal que $f(x,y) = 2e^{-2c+1} + 3$.

   b) Concluya que $\sup_{x,y \in (1,3)} f(x,y) \leq \frac{2+3e}{e}$. ¿Cuánto vale $\inf_{x,y(1,3)} f(x,y)$?

4. Estudiar la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2+x^3+xy^2}{x^2+2y^2} & \text{si (x,y)} \neq \text{(0,0)} \\ 0 & \text{si (x,y) = (0,0)} \end{cases}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,1,f(1,1))$ tiene ecuación $-x+2y+z=1$. Si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está definida por

$$g(x,y,z) = f(e^{x+y-z}, 2x^2 - \cos((y+x)\pi))$$

   hallar $\frac{\partial g}{\partial v}$ siendo $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO Y AULA:

NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Recuperatorio del Primer Parcial - 18/7/11

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,\text{sen}(y)}{(x^2 + |2+x|y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Analizar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

   b) Analizar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y + 1 + \dfrac{x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

   a) Encontrar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que existan las derivadas parciales de f en $(0,1)$.

   b) Para los valores de α hallados en el ítem anterior estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en el punto $(0,1)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ tal que $f(t,t) = 3t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, $\frac{\partial f(2,2)}{\partial v} = \frac{8}{5}$ donde $v = \frac{1}{5}(4,3)$. Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(2,2,f(2,2))$.

4. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el punto $(1,2)$ es $P(x,y) = -(x-1)^2 + (x-1)(y-2) - 3 + \frac{1}{2}(y-2)$. Si $f(x,y) = (xe^{(x-1)^2 y}, xy+2)$ y $h(x,y) = \nabla g(x,y)$ se define $F(x,y) = h \circ f(x,y)$. Hallar $F(1,0)$ y $DF(1,0)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Nombre y Apellido: TEMA D

Libreta: Turno de Práctica:

PRIMER PARCIAL

8 DE OCTUBRE DE 2011

1	2	3	4	5	Calificación

Nota: Todo debe estar debidamente justificado.

Ejercicio 1. Determinar la existencia y en caso afirmativo calcular el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo del conjunto

$$A = \left\{ \frac{7n}{5n-19} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ejercicio 2. Analizar la existencia de los siguientes límites. En caso afirmativo, compruebe la existencia por definición.

a)

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{(x+1)\operatorname{sen}^2(y^2-2(x+1)^2)}{y^4-4(x+1)^4}$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^y-1)^2}{x-y}$$

Ejercicio 3. Analizar la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(xy)(e^{y^2+(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-1)}{(y^2+(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f de clase C^2 tal que $f(1,-2) = 1$ y tal que la ecuación del plano tangente al gráfico de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el punto $(1,-2,\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2))$ es $z = x + 4y + 3$. Además, sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (f(x,y), -7+5x^2)$ y tal que $\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ g\right)(1,-2) = (0,-20)$. Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,-2,f(1,-2))$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en $(1,-2)$.

Ejercicio 5. Sean $f(x,y) = e^{3x+y}$ y $\mathcal{T}(x,y)$ el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(0,0)$.

a) Calcular $\mathcal{T}(x,y)$ y la forma de Lagrange para el resto.

b) Determinar el máximo error que se comete al aproximar $f(x,y)$ por $\mathcal{T}(x,y)$ si $(x,y) \in [0,\frac{1}{10}] \times [-\frac{1}{10},0]$.

TEMA 1

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Primer Parcial - 12/05/2012

---

1. Sean $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ y $b_n = |a_n|$.

a) Analizar la existencia de $\sup(A)$, $\text{ínf}(A)$, $\text{máx}(A)$ y $\text{mín}(A)$. En caso de existir, calcularlos justificando debidamente.

b) Hacer lo mismo que en el ítem anterior para el conjunto B.

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\text{lím}_{t\to 2} g(t)/t^2 = 3$. Analizar la continuidad de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto $(1, -1)$ siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y+1)g(x+y^2)}{(3(x-1)^2+2(y+1)^2)^{1/3}} & \text{si } (x,y) \neq (1,-1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,-1) \end{cases}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|(x^2+y^2)}{|x|^3+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Probar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sean $g(x,y) = (\ln(xy+1) + y\cos(\pi x),\ e^{3x} + 4y)$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable y el plano tangente al gráfico de $f \circ g$ en el punto $(0, 0, f \circ g(0,0))$ tiene ecuación

$$z = 3 + 2x + 3y.$$

Obtener la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(0, 1, f(0,1))$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4

CALIF.

APELLIDO, NOMBRE Y DNI:
LIBRETA: TEMA 1

Análisis Matemático I - Matemática 1 - Anaálisis matemático I
Curso de verano de 2013 - Primer Parcial.
25/02/2013

Ejercicio 1. Analizar la continuidad de

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-2y)sen(xy)}{xy^2+y} & si\ y\neq 0\ \ y\ \ xy\neq -1\\[2ex] x^2 & si\ y=0\ \ o\ \ xy=-1\end{cases}$$

en cada pundo de su dominio.

Ejercicio 2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x|y-1|^\alpha+y^2|x-1|^\beta}{e^y(x-1)^2+x^2(y-1)^2} & si\ (x,y)\neq(1,1)\\[2ex] 0 & si\ (x,y)=(1,1)\end{cases}$$

donde $\alpha,\beta>3$. Analizar la diferenciabilidad de f en los puntos $p_1=(4,2)$ y $p_2=(1,1)$.

Ejercicio 3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $p=(1,1)$ y $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definidas $\alpha(t)=(3-t,t-1)$ y $\beta(t)=(t,t^2)$. Sabiendo que f cumple las siguientes condiciones: i) f se anula sobre $Im(\alpha)$, es decir sobre la imagen de α y ii) $f\circ\beta(t)=e^{t+t^2-2}-1$, calcular la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $v=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

Ejercicio 4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función $f(x,y)=ln(1+x^2+y^2)+y$.

a.) Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden, $P_2(x,y)$, asociado a f desarrollado alrededor del punto $(0,0)$ y dar la expresión de Lagrange del resto correspondiente.

b.) Usando el ítem anterior calcular el límite de la función

$$g(x,y)=\frac{ln(1+x^2+y^2)-yx^2}{x^2+y^2}$$

cuando $(x,y)\to(0,0)$

Justifique todas sus respuestas.

Nombre y Apellido: **Carrera:**

Libreta: **Comisión de Práctica:**

PRIMER PARCIAL

1	2	3	4	Calificación

Todo debe estar debidamente justificado.

Tema D

Ejercicio 1. Sea $(a_n)_n$ la sucesión definida por:

$$a_n = \frac{4n+2}{7n-20}$$

Calcular, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Ayuda: considere la función* $f(x)$ *tal que* $f(n) = a_n$.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{5/3}y^{2/3} - y\sin^2(\frac{\pi}{4}x)}{x^2 + |1-x|y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar la continuidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^3(1+xy^4-2y^4)+y^3}{(x-2)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (2,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (2,0) \end{cases}$$

a) Analizar la existencia de $\frac{\partial f}{\partial v}(2,0)$ para toda dirección $v \neq 0$.

b) Determinar si f es diferenciable en $(2,0)$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $f(0,1) = 1$,

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{2}\cos(xy)y^2$,
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = xy\cos(xy) + \sin(xy) + y^2\cos(xy)$, donde $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

a) Hallar la dirección de máximo crecimiento de f en $(0,1)$.

b) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0,1)$.